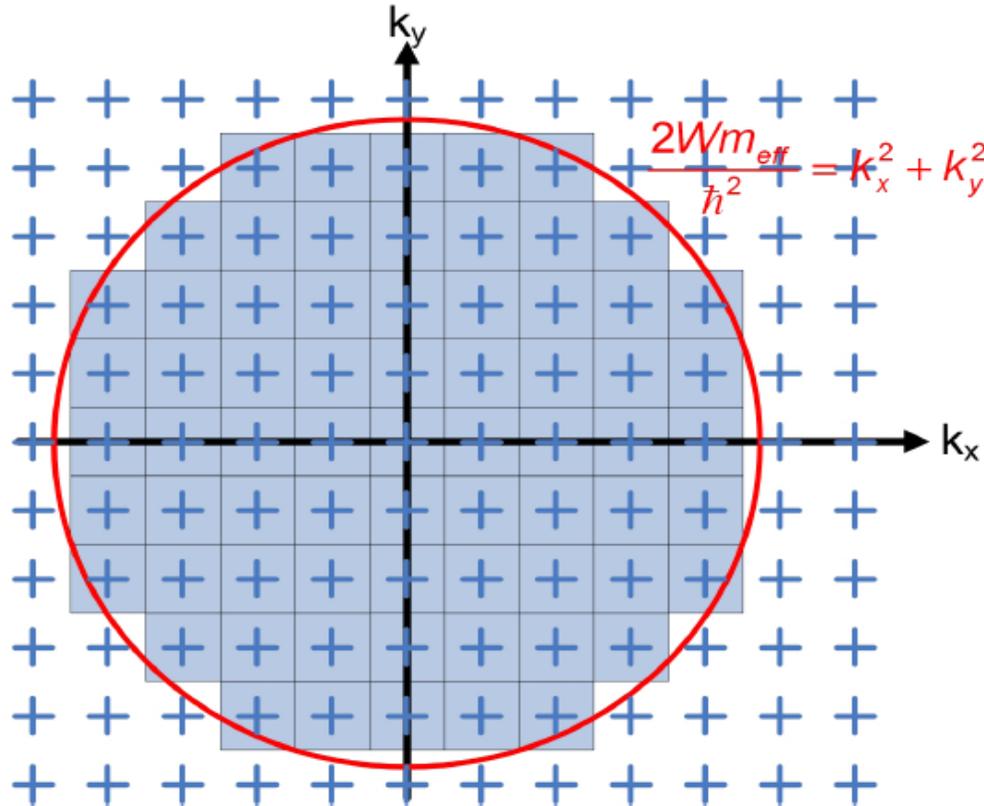


Übersicht über die Vorlesung

- I. Einleitung
- II. Optik in Halbleiterbauelementen
- III. Herstellungstechnologien
- IV. Halbleiterleuchtdioden
- V. Quantenmechanische Grundlagen der Optoelektronik
 - V.1 Zustandsdichten
 - V.2 Fermis Goldene Regel
 - V.3 Interbandübergänge in Halbleitern
 - V.4 Exzitonen
 - V.5 Homogene und inhomogene Verbreiterung
- V. Laserdioden
- VI. Modulatoren
- VII. Weitere Quantenbauelemente

8. Foliensatz
SS 2016
29.06.2016

Die Zustandsdichte bei Halbleitern verschiedener Dimension



Allgemeines (unabh. von der Dimension)
Vorgehen (siehe FE):

Unterteilung in n-dimensionale Würfel
mit Kantenlänge L

Periodische Randbedingungen:

$$\psi(\mathbf{x} + L) = \psi(\mathbf{x}); \psi(\mathbf{y} + L) = \psi(\mathbf{y}); \dots$$

Damit ergeben sich die folgenden
Einschränkungen für die erlaubten
Wellenvektoren:

$$\Psi_{nk}(\vec{r}) = e^{j\vec{k}\vec{r}} u_{n\vec{k}}(\vec{r}) \text{ mit}$$

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x; k_y = \frac{2\pi}{L} n_y; \dots$$

(dargestellt durch Kreuze in der Abb.)

Gesamtanzahl N der Zustände mit einer Energie kleiner E

Für den Zusammenhang von Energie und Wellenvektor gilt:

$$r_k^2 = \frac{2Em_{\text{eff}}}{\hbar^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

Gesamtanzahl der Zustände mit einer Energie kleiner E:

$$N(E) = \frac{V_{\text{alle Zustände}}}{V_{\text{ein Zustand}}} = 2 \cdot \frac{\frac{4}{3} \pi \left(\frac{2Em_{\text{eff}}}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{8\pi^3}{L^3}}$$

$$N(E) = L^3 \frac{(2 m_{\text{eff}})^{\frac{3}{2}}}{3\pi^2 \hbar^3} \cdot E^{\frac{3}{2}}$$

3 dimensionaler Halbleiter

$$r_k^2 = \frac{2Em_{\text{eff}}}{\hbar^2} = k_x^2 + k_y^2$$

Gesamtanzahl der Zustände mit einer Energie kleiner E:

$$N(E) = \frac{V_{\text{alle Zustände}}}{V_{\text{ein Zustand}}} = 2 \cdot \frac{\pi \left(\frac{2Em_{\text{eff}}}{\hbar^2} \right)}{\frac{4\pi^2}{L^2}}$$

$$N(E) = \frac{E m_{\text{eff}}}{\pi \hbar^2} \cdot L^2$$

2 dimensionaler Halbleiter

Die Zustandsdichte bei Halbleitern verschiedener Dimension

Zustandsdichte pro Volumenintervall bei Energie E

3D :

$$g(E) = \frac{1}{L^3} \frac{dN(E)}{dE} = \frac{(2 \cdot m_{\text{eff}})^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot \pi^2 \cdot \hbar^3} \cdot E^{\frac{1}{2}}$$

2D :

$$g(E) = \frac{1}{L^2} \frac{dN(E)}{dE} = \frac{m_{\text{eff}}}{\pi \cdot \hbar^2}$$

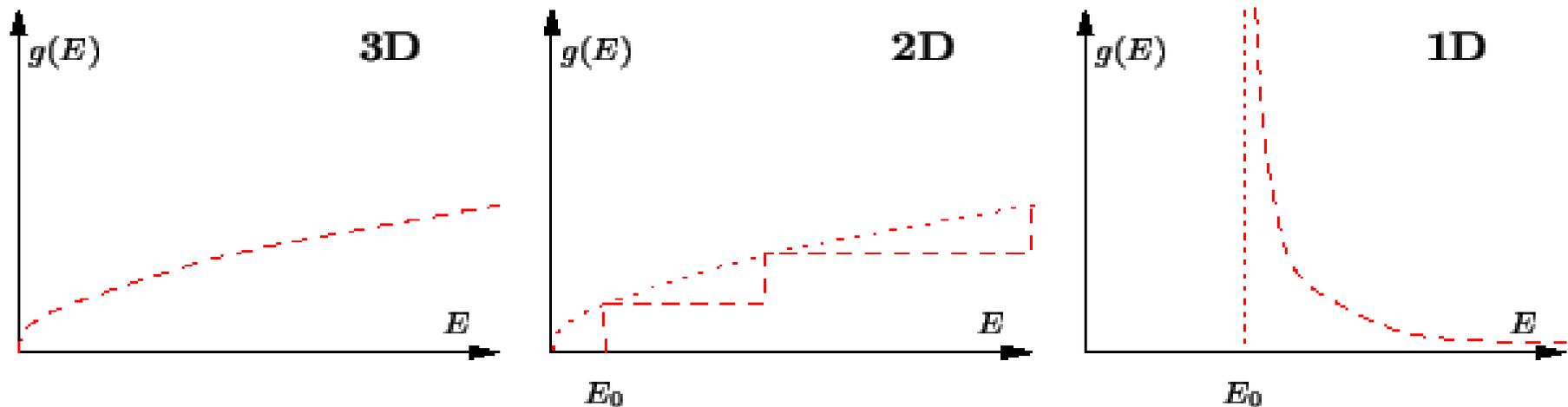


Abb.: Energieabhängigkeit der Zustandsdichte für verschiedene Dimensionen des Halbleiters

Übersicht über die Vorlesung

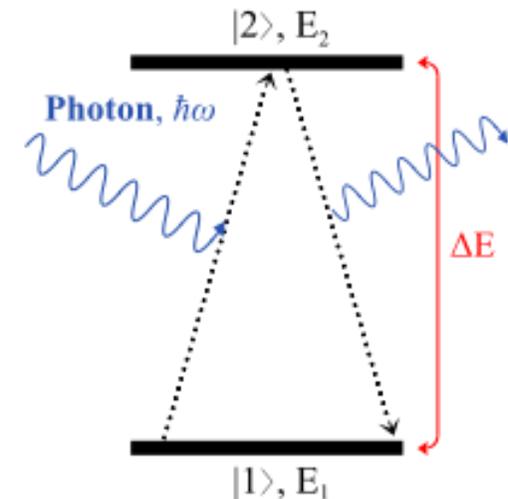
- I. Einleitung
- II. Optik in Halbleiterbauelementen
- III. Herstellungstechnologien
- IV. Halbleiterleuchtdioden
- V. Quantenmechanische Grundlagen der Optoelektronik
 - V.1 Zustandsdichten
 - V.2 Fermis Goldene Regel
 - V.3 Interbandübergänge in Halbleitern
 - V.4 Exzitonen
 - V.5 Homogene und inhomogene Verbreiterung
- V. Laserdioden
- VI. Modulatoren
- VII. Weitere Quantenbauelemente

Wechselwirkung von Licht und Materie:

Bei einem Übergang zwischen verschiedenen Quantenzuständen ist die Lösung der Schrödingergleichung nicht mehr stationär

→ explizite Betrachtung der über einen zeitabhängigen Phasenfaktor hinausgehenden Zeitabhängigkeit erforderlich

→ *Quantenmechanische Störungsrechnung*



Quantenmechanische Übergänge

Zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion wird allgemein beschrieben durch die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar} \tilde{H} \Psi \quad \tilde{H} \text{ ist hierbei der Hamiltonoperator}$$

$$\text{wobei: } \tilde{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t)$$

Störungsrechnung: Hamiltonoperator wird unterteilt in zeitunabhängigen und zeitabhängigen Anteil:

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{H}'$$

$$\text{wobei: } \tilde{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \quad \text{wobei } V(\vec{r}) \text{ das Gitterpotential ist.}$$

Als Lösungen ergeben sich die Blochzustände: $\psi(\vec{r}, t) = u_{nk}(\vec{r}) \exp(i\vec{k}\vec{r})$

Licht als elektromagnetische Welle wird dann als eine Störung \tilde{H}' des Systems behandelt.

Quantenmechanische Übergänge

Elektron in einem Blochzustand $\psi_{n,\mathbf{k}}$



Einschalten der Störung H'



Blochzustand ist kein Eigenzustand mehr



H' induziert Übergänge zu anderen Quantenzuständen $\psi_{n',\mathbf{k}}$

Aus der expliziten Betrachtung der zeitabhängigen Störung kann ein Ausdruck für die

Rate für Übergänge aus einem Zustand ψ_1 in einen Zustand ψ_2 :

$$W_{1 \rightarrow 2} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int d^3r \Psi_2^*(\vec{r}) H'(\vec{r}) \Psi_1(\vec{r}) \right|^2 \delta(E_2 - E_1 \pm \hbar\omega)$$

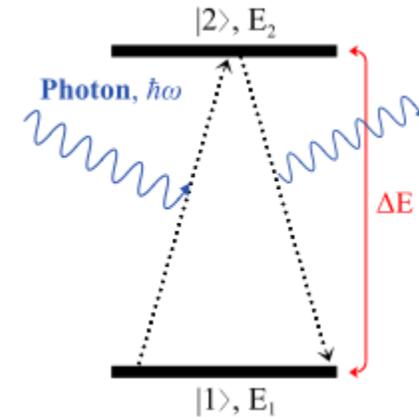
Optische Übergänge: Quantenmechanisch

Fermis Goldene Regel:
$$W_{1 \rightarrow 2} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int d^3r \Psi_2^*(\vec{r}) H'(\vec{r}) \Psi_1(\vec{r}) \right|^2 \delta(E_2 - E_1 \pm \hbar\omega)$$

Zeitliche Periodizität \rightarrow Delta-Funktion in E:

Übergänge nur, wenn die Energie „passt“

$H'(\vec{r})$ enthält keine explizite Zeitabhängigkeit mehr

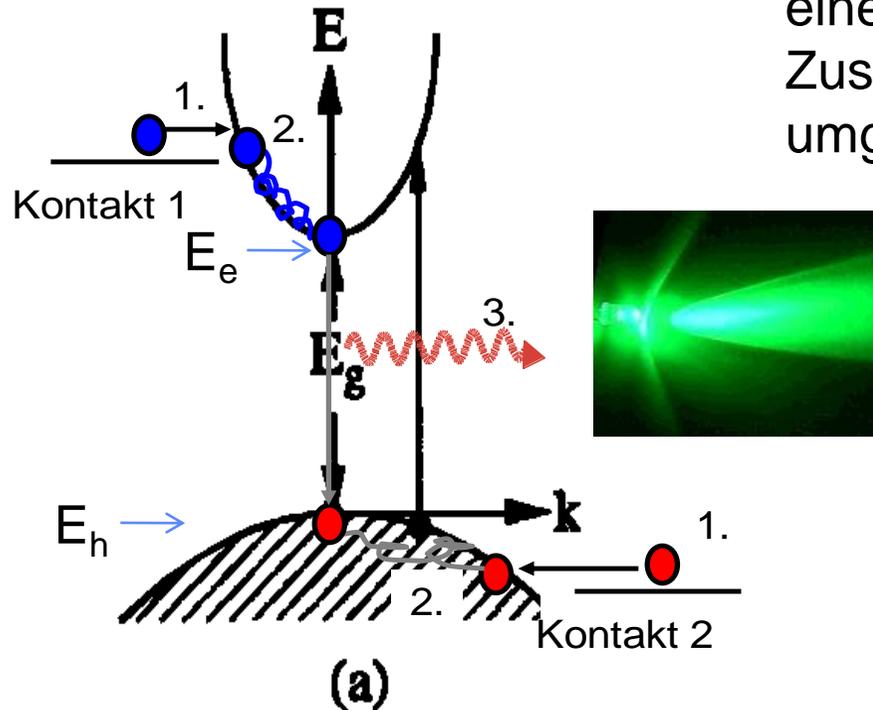


$M = \int d^3r \Psi_2^*(\vec{r}) H'(\vec{r}) \Psi_1(\vec{r})$ wird als Matrixelement des optischen Übergang bezeichnet

Für ein elektromagnetisches Wechselfeld ist der Störoperator:

$$H'(\vec{r}, t) = -\frac{e}{m_0} \underbrace{\left\{ \frac{\vec{A}_0}{2} \exp[j(\vec{k}\vec{r} - \omega t)] \right\}}_{\text{elektromagnetisches Vektorpotential}} \underbrace{(-j\hbar\nabla)}_{\text{Impulsoperator}} + \text{konj. kompl.}$$

Optische Übergänge



Bei optischen Übergängen koppelt das Licht eines Zustand im Valenzband mit einem Zustand im Leitungsband (bei Absorption) bzw. umgekehrt (bei Emission).

Für die Stärke des Übergangs bei gilt:

$$\alpha_0 = \text{const.} |p_{CV}|^2 \sqrt{\hbar\omega - E_G}$$

Energieabhängigkeit der **kombinierten Zustandsdichte**, ergibt sich aus den einzelnen Zustandsdichten.

$$I(\hbar\omega) = \alpha_0 f(E_e) f(E_h)$$

Für die Stärke der Emission bei einer Wellenlänge gilt:

α_0 : Absorptionskoeffizient des Materials

Übersicht über die Vorlesung

- I. Einleitung
- II. Optik in Halbleiterbauelementen
- III. Herstellungstechnologien
- IV. Halbleiterleuchtdioden
- V. Quantenmechanische Grundlagen der Optoelektronik
 - V.1 Zustandsdichten
 - V.2 Fermis Goldene Regel
 - V.3 Interbandübergänge in Halbleitern
 - V.4 Exzitonen
 - V.5 Homogene und inhomogene Verbreiterung
- V. Laserdioden
- VI. Modulatoren
- VII. Weitere Quantenbauelemente

Absorption: 3D Halbleiter (Vereinfachte Theorie)

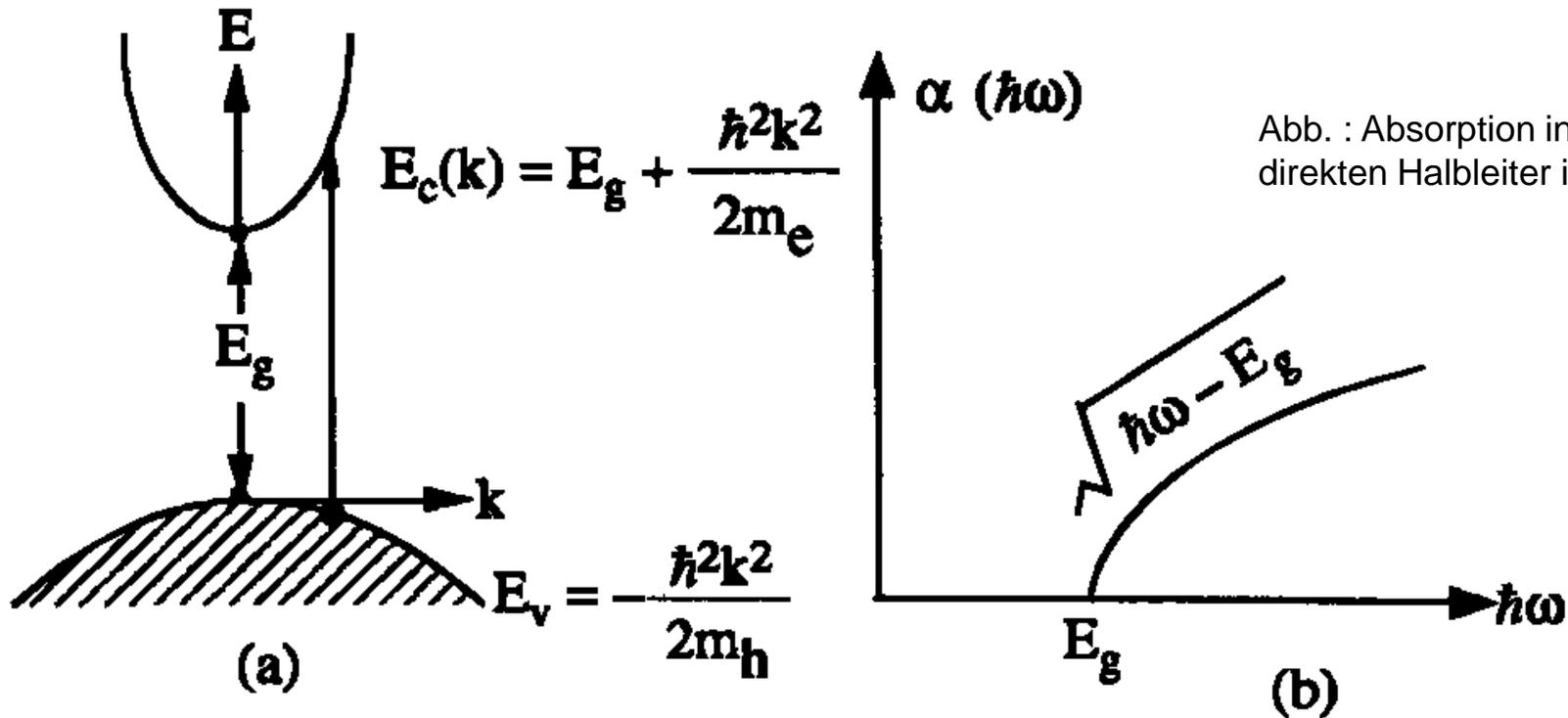
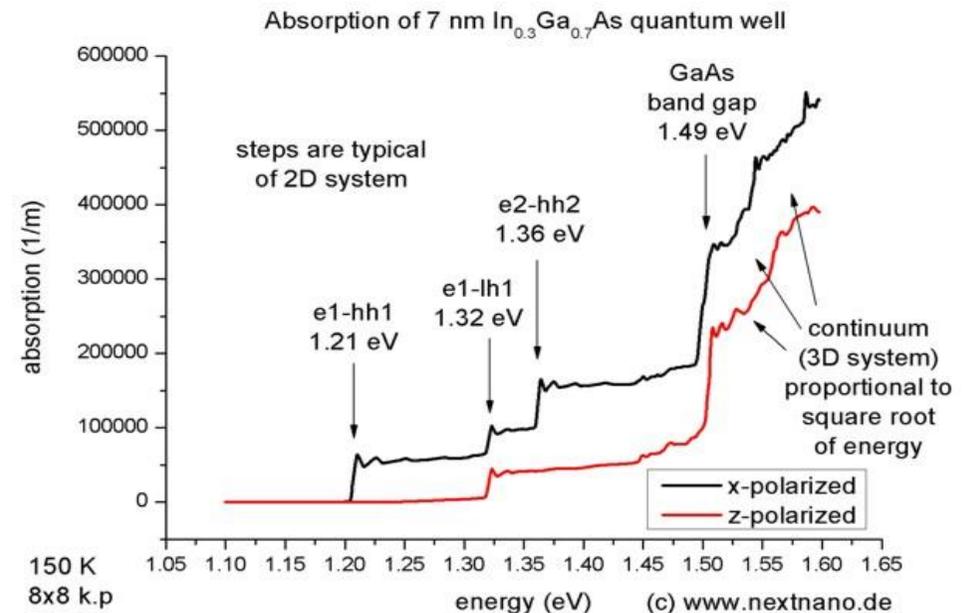
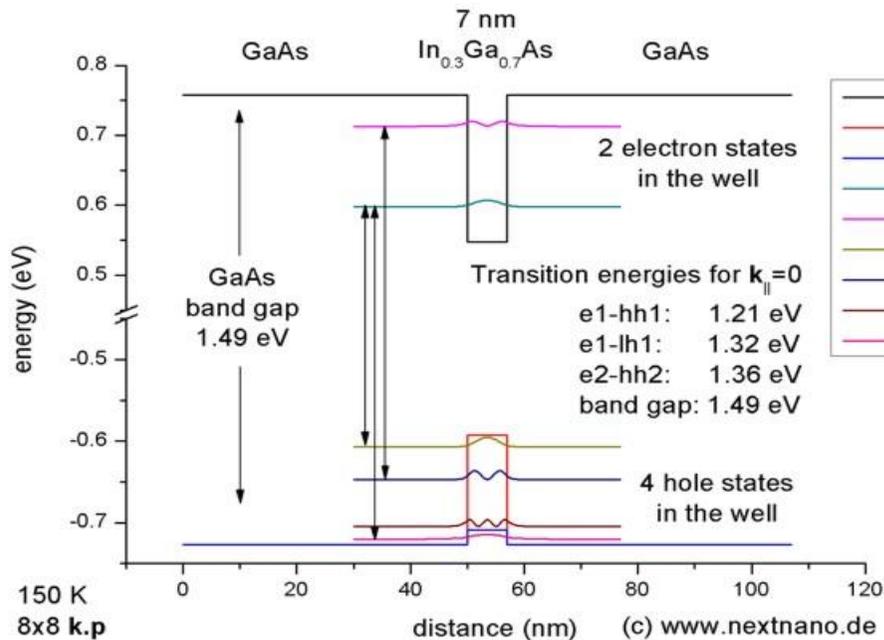
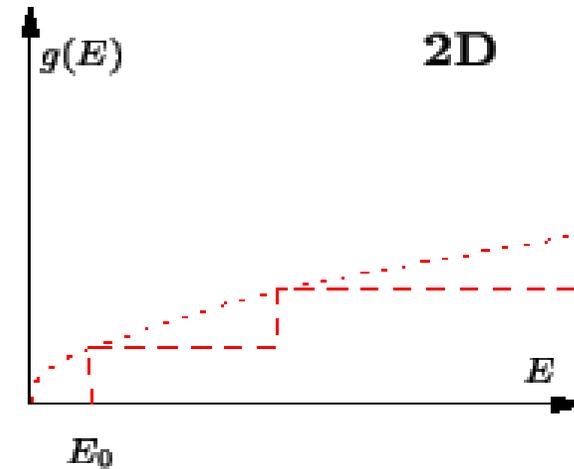


Abb. : Absorption in einem direkten Halbleiter in Parabelnäherung

Absorption: 2D Halbleiter (Quantum Well) (Theorie)

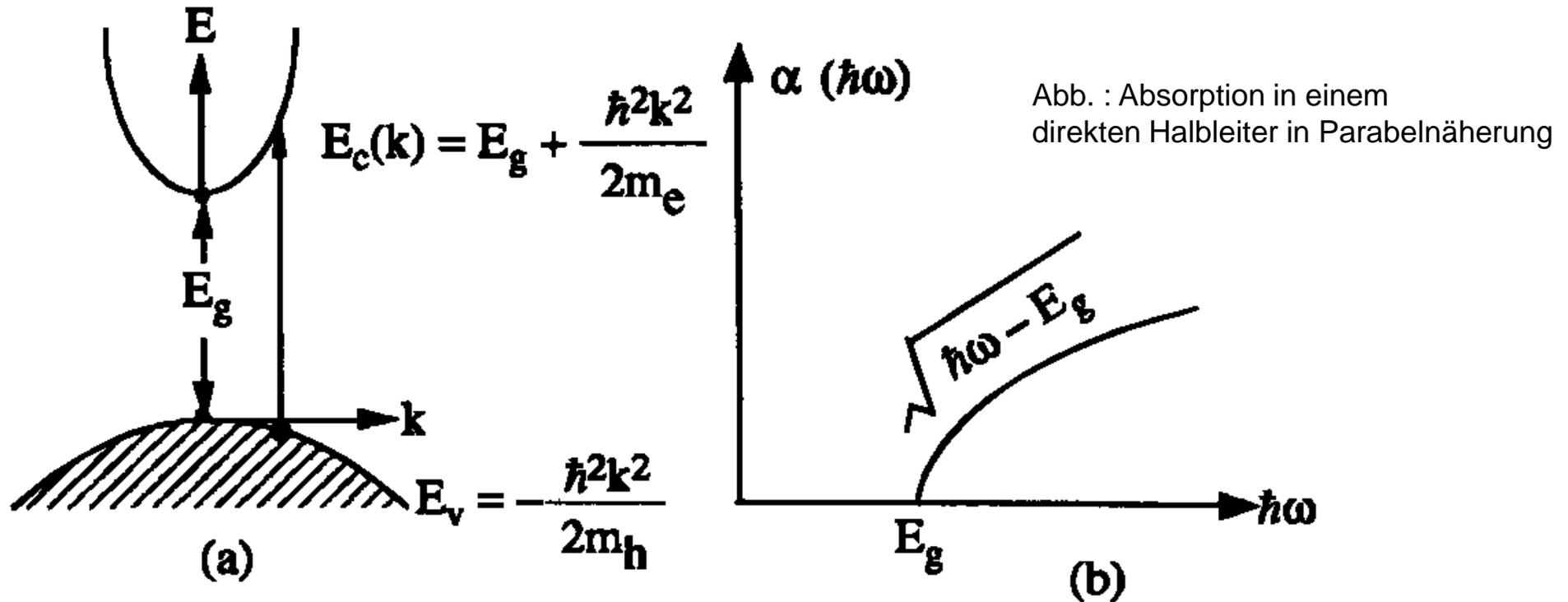
Sowohl für die Löcher als auch die Elektronen gilt die 2D Zustandsdichte



Übersicht über die Vorlesung

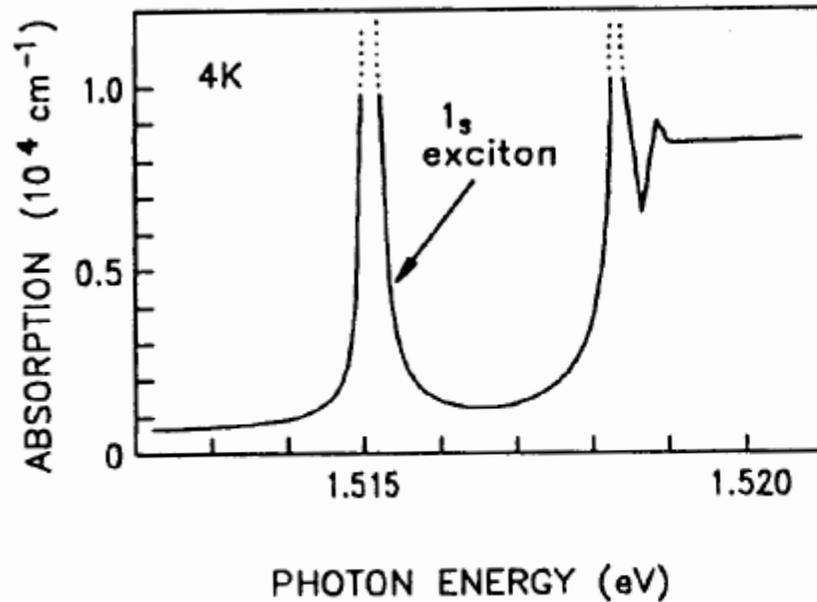
- I. Einleitung
- II. Optik in Halbleiterbauelementen
- III. Herstellungstechnologien
- IV. Halbleiterleuchtdioden
- V. Quantenmechanische Grundlagen der Optoelektronik
 - V.1 Zustandsdichten
 - V.2 Fermis Goldene Regel
 - V.3 Interbandübergänge in Halbleitern
 - V.4 Exzitonen
 - V.5 Homogene und inhomogene Verbreiterung
- V. Laserdioden
- VI. Modulatoren
- VII. Weitere Quantenbauelemente

Absorption: 3D Halbleiter (Theorie)

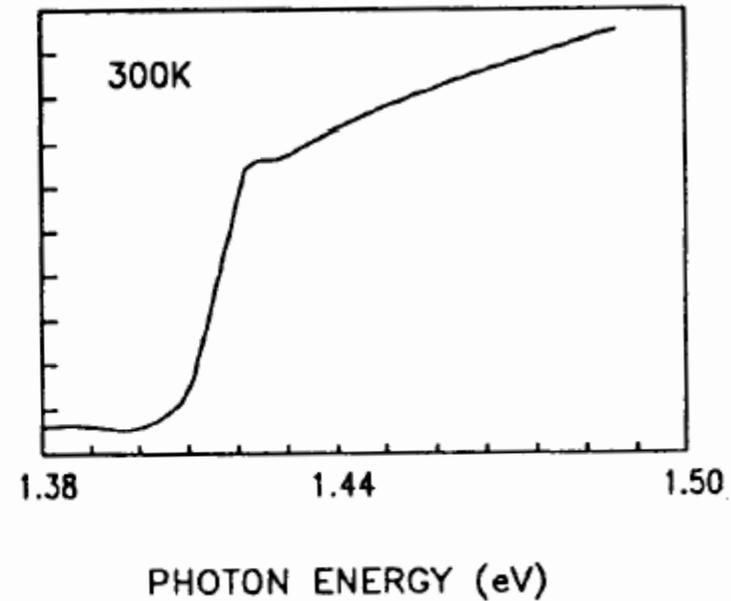


Die Absorption in einem Halbleiter sieht in der Messung anders aus als bisher gezeigt: Es gibt insbesondere bei tiefen Temperaturen einen Peak mit großer Absorption energetisch unterhalb der Bandlücke.

Absorption im Volumenhalbleiter (Messung)



(a)

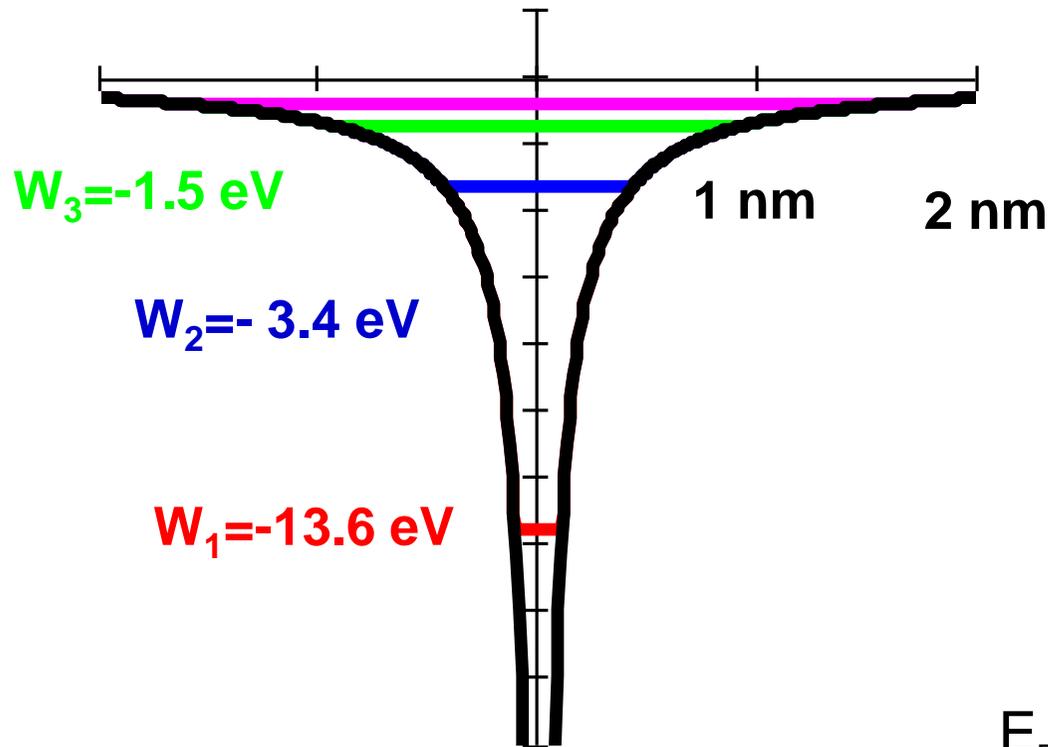


(b)

Absorptionsspektren von GaAs bei 4 K und bei 300 K

→ Die immer gern diskutierte wurzelförmige Abhängigkeit ist nur eine schlechte Näherung ... auch bei Raumtemperatur.
Dies auf Exzitonen (Elektronen-Loch-Paare) zurückzuführen.

Analogie zum Wasserstoffatom



Das Elektron und das Proton im Wasserstoffatom bilden einen gebundenen quantenmechanischen Zustand.

Für die Energieniveaus gilt:

$$E_n = -\frac{e^4 m}{2\hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{E_{\text{Ryd}}}{n^2};$$

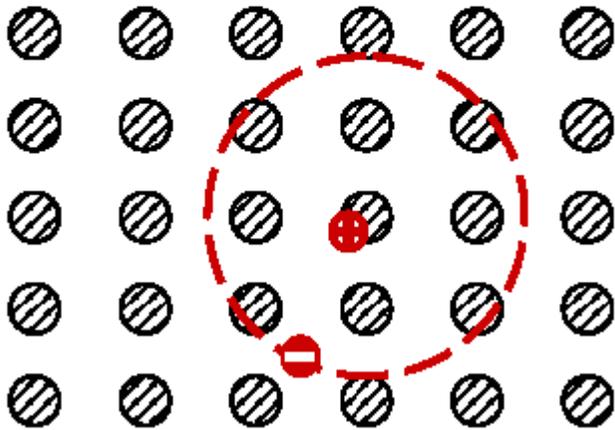
mit $E_{\text{Ryd}} = 13.6 \text{ eV}$

$$E_n = -\frac{E_{\text{Ryd}}}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad E_{\text{Ryd}} = 13.6 \text{ eV}$$

Vom H-Atom zum Wannier-Exziton im HL

Wannier exciton

(typical of inorganic
semiconductors)



Wie bei der Anziehung von Elektron und Proton beim H-Atom ziehen sich Elektron im Leitungsband und Loch im Valenzband an. (Eine ähnliche Situation ergibt sich für ein an eine Störstelle gebundenes Elektron (siehe PB))

Beim H-Atom gilt für die Energien:

$$E_n = -\frac{e^4 m}{2\hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{E_{Ryd}}{n^2}; \text{ mit } E_{Ryd} = 13.6 \text{ eV}$$

Für die Berechnung der Energien im Halbleiter müssen die Masse m durch die reduzierte Masse des Exzitons μ und die Permittivität ϵ_0 des Vakuums durch die des Halbleiter $\epsilon_r \epsilon_0$ ersetzt werden:

$$E_{exc,n} = -\frac{e^4 \mu}{2\hbar^2 (4\pi\epsilon_r \epsilon_0)^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \frac{\mu}{m_0} \left(\frac{1}{\epsilon_r} \right)^2;$$

$$\text{wobei } \mu = \frac{m_{e,eff} m_{h,eff}}{m_{e,eff} + m_{h,eff}} \quad (\text{reduzierte Masse})$$

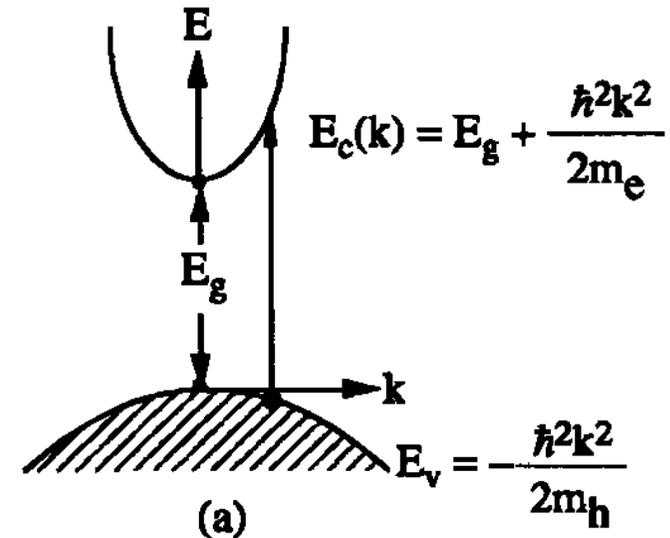
Exzitonen in GaAs

Beispiel: Exzitonen in GaAs:

$$\epsilon_r = 13; m_{e,\text{eff}} = 0.067 m_0; m_{h,\text{eff}} = 0.45$$

$$\mu = \frac{m_{e,\text{eff}} m_{h,\text{eff}}}{m_{e,\text{eff}} + m_{h,\text{eff}}} = \frac{0.067 \cdot 0.45}{0.067 + 0.45} m_0 = 0.058 m_0$$

$$E_{\text{exc},n} = -\frac{13.6\text{eV}}{n^2} \frac{\mu}{m_0} \left(\frac{1}{\epsilon_r}\right)^2 = -\frac{13.6\text{eV}}{n^2} 0.058 \left(\frac{1}{13}\right)^2 = -\frac{1}{n^2} 4.67\text{meV} = -\frac{1}{n^2} R_x;$$



Es ergibt sich also eine Exzitonenbindungsenergie, die deutlich unterhalb von kT bei Raumtemperatur liegt. Damit sind die Exzitonen typischerweise bei 300 K dissoziiert. Dies heißt aber nicht, dass der zugrundeliegende Effekt der Coulombanziehung von Elektronen und Löchern verschwunden wäre.

Exzitonen sind nicht nur ein Tieftemperatureffekt

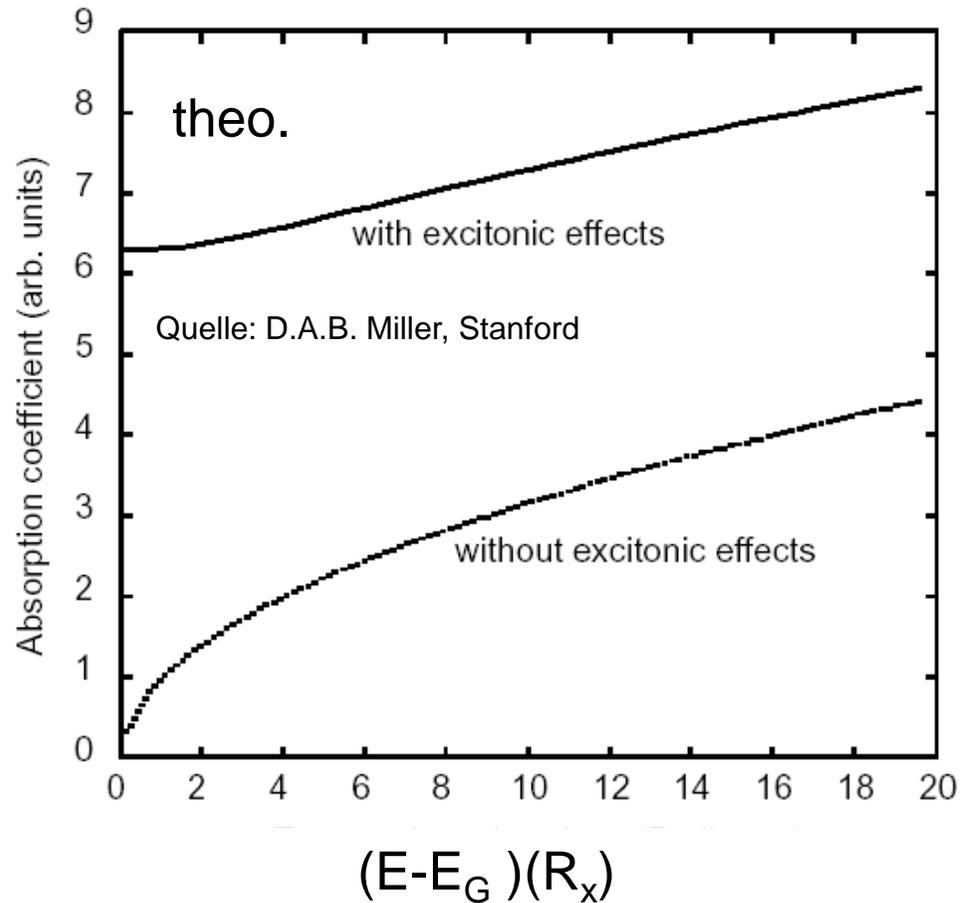
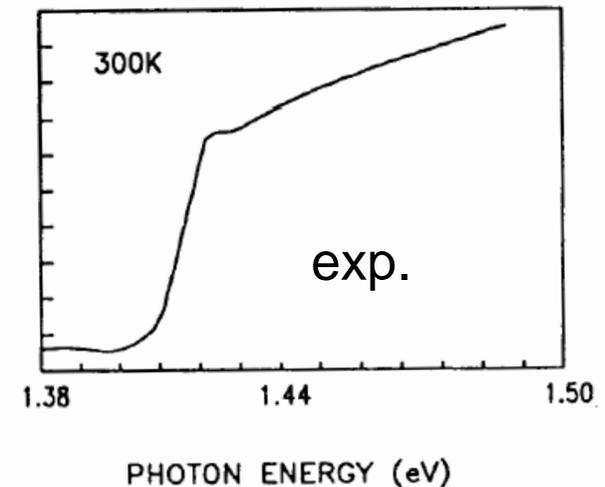


Abb. Berechnete Absorptionsspektren für einen Halbleiter mit und ohne exzitonische Effekte

Absorption wird erhöht durch den „Sommerfeld“-Faktor

$$\alpha(\hbar\omega) = \alpha_0(\hbar\omega) \cdot B_S(\hbar\omega)$$

$$B_S(\hbar\omega) = \pi \sqrt{\frac{R_x}{\hbar\omega - E_G}} \frac{\exp\left(\pi \sqrt{\frac{R_x}{\hbar\omega - E_G}}\right)}{\sinh\left(\pi \sqrt{\frac{R_x}{\hbar\omega - E_G}}\right)}$$



Absorption: 2D Halbleiter (Quantum Well) Messung

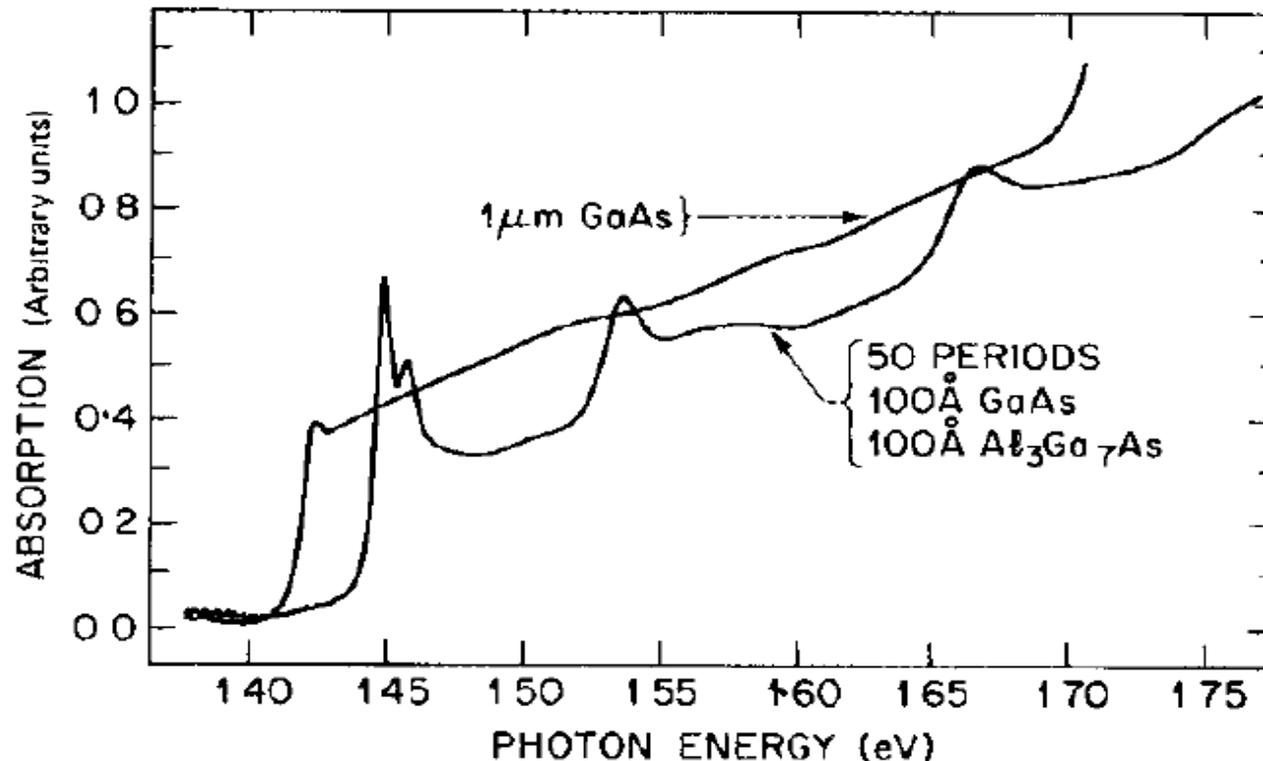
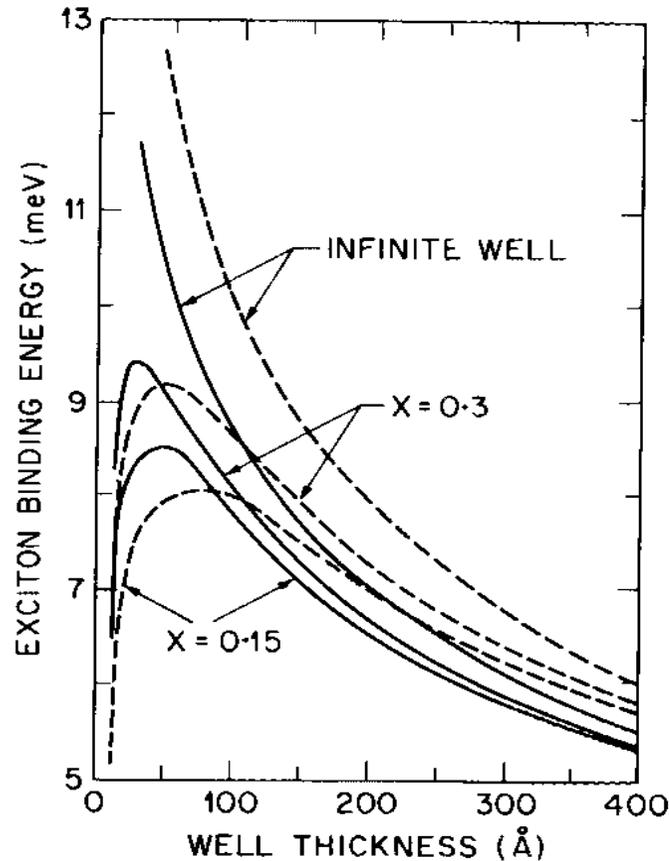


Figure 6 Comparison of the room-temperature absorption spectra of high-quality bulk and $L_z = 100 \text{ \AA}$ quantum well GaAs samples. The bump at the onset of the bulk spectrum is the remnant of the exciton resonance. The quantum well spectrum shows the onset of absorption shifted by the confinement, followed by excitons and plateaus corresponding to $n_z = 1, 2$ and 3 . The $n_z = 1$ hh and lh excitons peaks are remarkably well resolved.

ADVANCES IN PHYSICS, 1989, VOL 38, NO 2, 89-188

Exzitonenbindungsenergien in Quantum Wells: Theorie



Die exzitonischen Effekte sind in 2D noch deutlich ausgeprägter. Qualitativ ist das dadurch zu erklären, dass Elektron und Loch gemeinsam im Quantum Well „eingesperrt“ sind und daher stärker miteinander wechselwirken. Dies hilft der strahlenden Rekombination in einer Leuchtdiode.

Figure 5 Variation of the exciton binding energy in a GaAs/Al_xGa_{1-x}As quantum well, as a function of quantum well thickness. The solid lines correspond to the heavy-hole exciton and the dashed lines to the light-hole exciton. Curves for the three well depths are shown: an infinite well, $\Delta E_g \sim 190$ meV and $\Delta E_g \sim 380$ meV corresponding to $x \sim 0.15$ and 0.3 respectively. (After Greene *et al.* (1984).)

Übersicht über die Vorlesung

- I. Einleitung
- II. Optik in Halbleiterbauelementen
- III. Herstellungstechnologien
- IV. Halbleiterleuchtdioden
- V. Quantenmechanische Grundlagen der Optoelektronik
 - V.1 Zustandsdichten
 - V.2 Fermis Goldene Regel
 - V.3 Interbandübergänge in Halbleitern
 - V.4 Exzitonen
 - V.5 Homogene und inhomogene Verbreiterung
- V. Laserdioden
- VI. Modulatoren
- VII. Weitere Quantenbauelemente

Emission spectrum

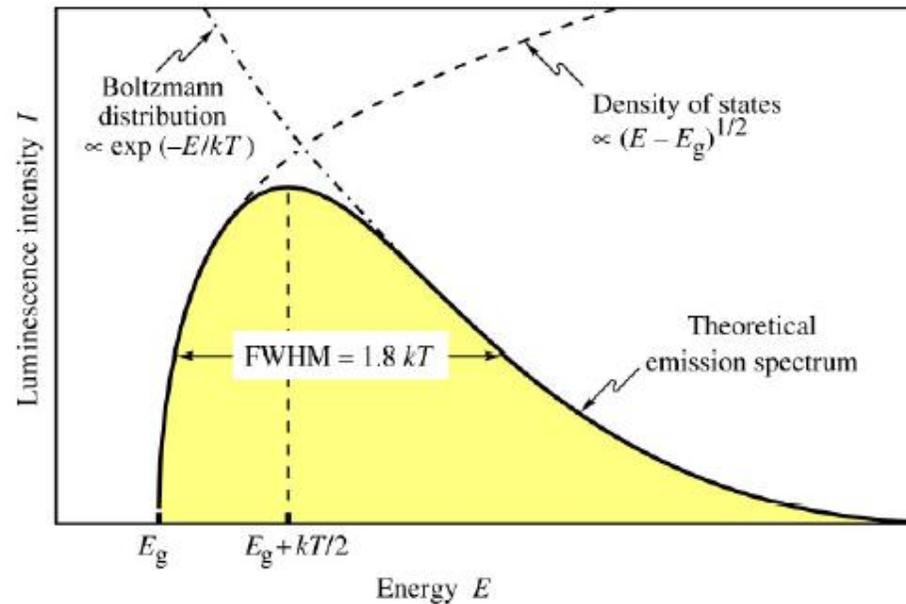


Fig. 5.2. Theoretical emission spectrum of an LED. The full width at half maximum (FWHM) of the emission line is $1.8 kT$.

$$I(E) \propto \sqrt{E - E_g} e^{-E/(kT)}$$

$I(E)$ = emission spectrum

$$E = E_g + \frac{1}{2} kT$$

Energy of maximum emission intensity

$$\Delta E = 1.8 kT$$

Spectral width

Emissionseigenschaften von Leuchtdioden

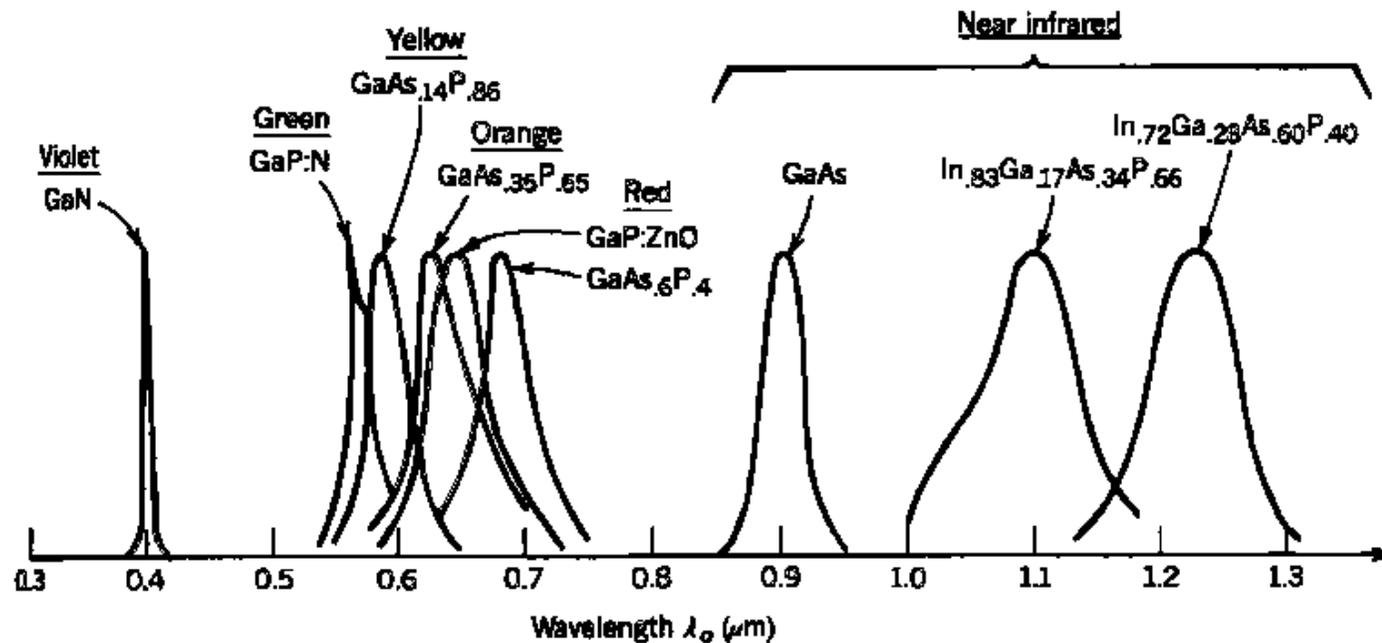
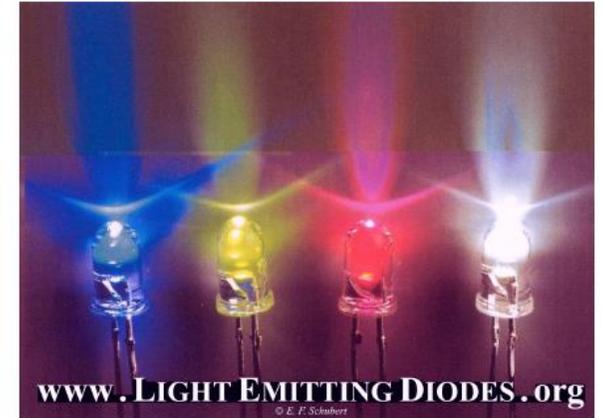
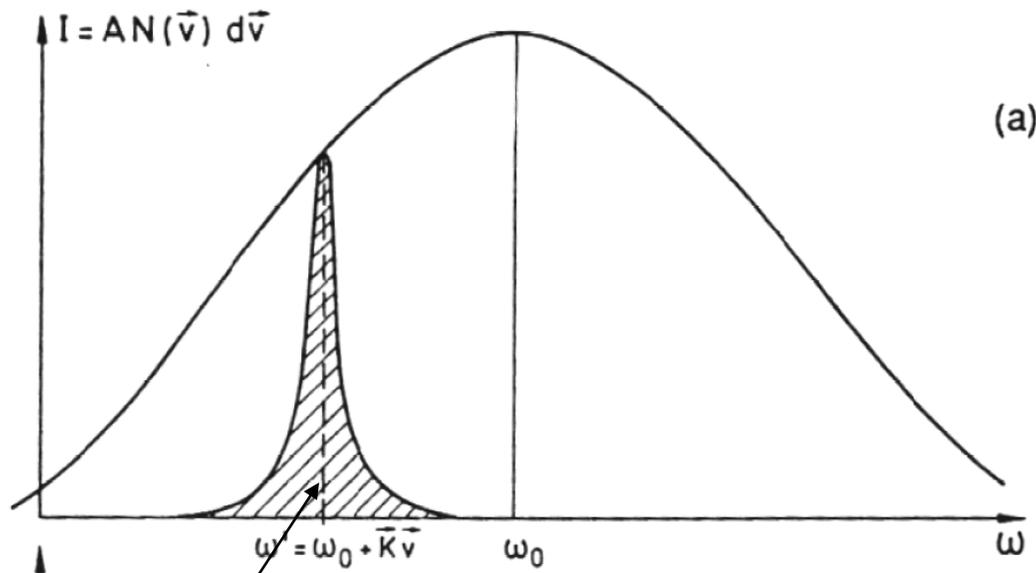


Abb. : Emissionsspektren verschiedener LEDs

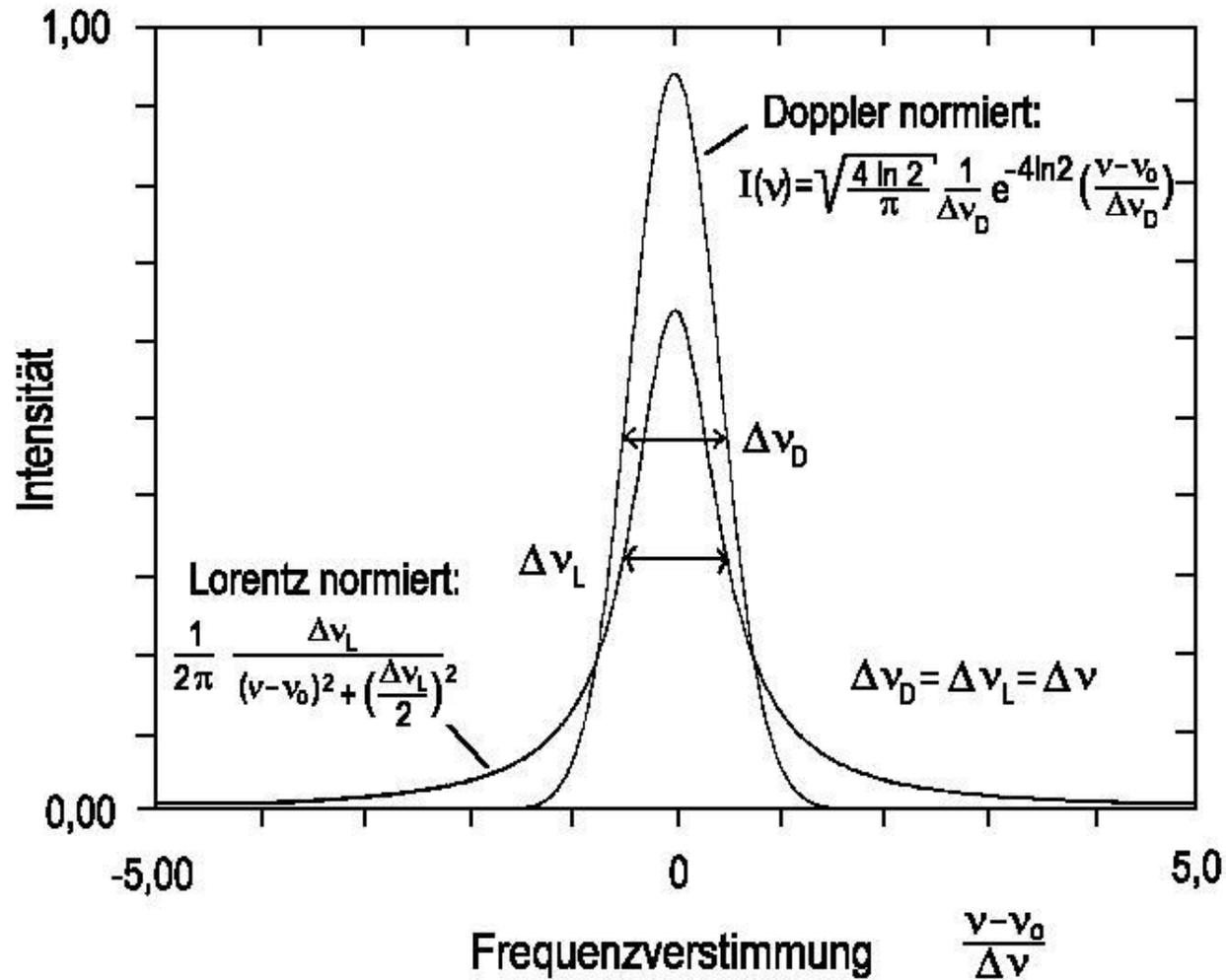
Verbreiterung eines optischen Übergang: Homogene Verbreiterung



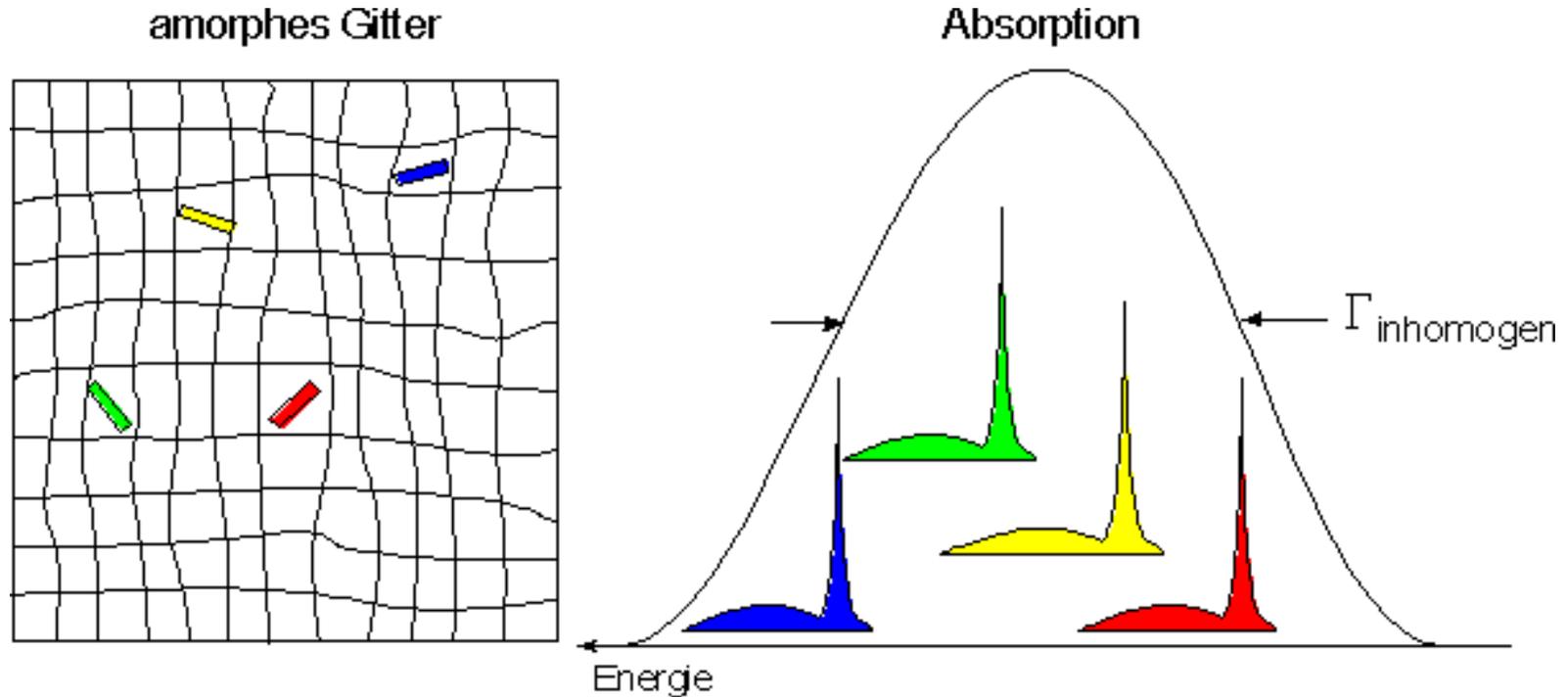
homogene Verbreiterung: Gleich verbreiterte Linie für alle Atome (Moleküle etc.)

- Stossverbreiterung
- Verbreiterung aber auch einfach durch die Lebensdauer des angeregten Zustandes
- wird beschrieben durch eine Lorentzlinie

Vergleich: Lorentz-Linie/Gauß-Linie



Exkurs: Verbreiterung eines optischen Übergang: Inhomogene Verbreiterung



Inhomogene Verbreiterung: Unterschiedliche Lage der Resonanzenergie für unterschiedliche Atome (Moleküle etc.), Unterschiedliche k-Vektoren im Halbleiter

-anderes Beispiel: Dopplerverbreiterung beim Gas

...wird meistens beschrieben durch Gaußkurve